scale，缩放，是很简单的，但注意我们的视角，是对向量做变换，所以 $T\vec{x}$ 不应该看成用向量对左边的矩阵的列向量进行线性组合，而应该用左边矩阵对右边向量的行向量（也就是单个值）进行线性组合。

reflect（反射）同理。

Shear（切变），x → x + f(y)，观察到 f(y) 是个线性函数，带入（y=0, f(y)=0），（y=1, f(y)=a）得到 f(y) = ay，故变换是（y → y, x → x + ay），写成矩阵是:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

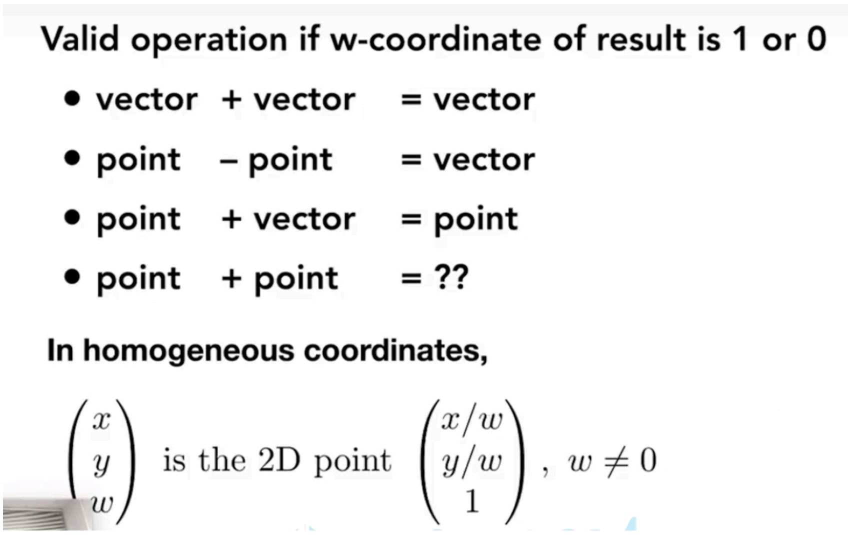
旋转变换我之前还真没想过这么推导，但仔细看其实就是我上面推导切变的方式，由于这个方式是现场想出来的所以还不熟……

原来这就是 **线性变换** 哦！

提到了齐次坐标下向量增加的那一维为什么是零，但还没说具体在那种场景下才会有这样混合运算的需求。

下面这个确实非常 nb，齐次坐标的设计竟然如此优雅。

所以我上周对齐次坐标的判断居然不是初步的，而是本来就是这样的?! OME



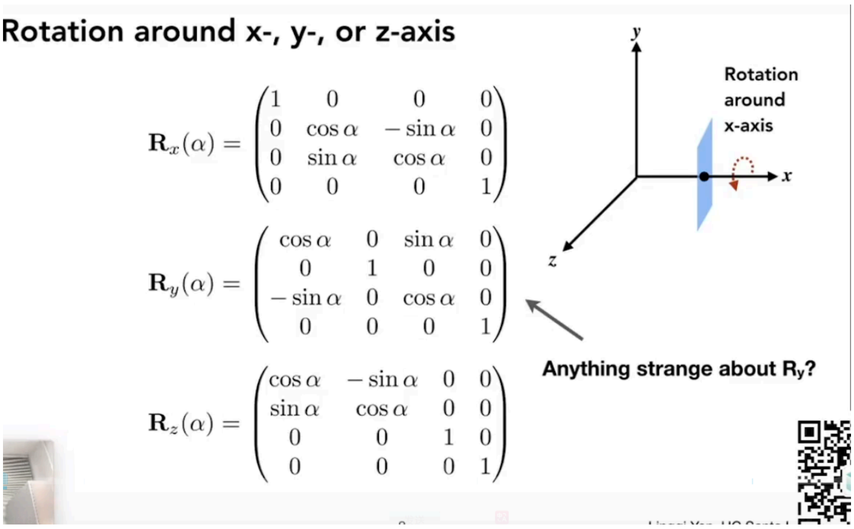
仿射变换看上去就是统一了一下概念。

逆变换其实就是矩阵求逆。

另外，平移和线性变换没有交换律，仿射变换把线性变换和平移变换写在一个矩阵里是因为是先线性变换后平移变换，反过来的矩阵是不一样的。

三维旋转

转置就是逆的矩阵叫做正交矩阵。依稀记得 MIT 那门 18.06 讲行变换矩阵的时候提过。



这里解释的是正确的，绕 y 轴旋转时 z → x 才是正方向。

rodrigue’s rotaion formula 的推导先略过。(Tag：要还债!)

---

view 变换

model，view，projection，MVP。

在 view transformation 中，up direction 是为了固定相机画幅。

来了，相机的“标准状态”。position at (0,0,0)，look at -z，up is +y.

需要补课的地方还不少，又加了一个：旋转矩阵为什么是正交矩阵?

这里就先推导一下 R_{view}^{-1}：

> 由于需要考虑的是 X to $(\vec{g}\times\vec{t})$，Y to $\vec{t}$，Z to $-\vec{g}$，而 X,Y,Z 是基，所以矩阵的构造非常显然

推导了吗，如推。

在进入下一节之前，先还债，证明旋转矩阵是正交矩阵。

旋转矩阵是保距变换，即 $R(\vec{v})\cdot R(\vec{w}) = \vec{v}\cdot\vec{w}$，这个很好理解，同样的旋转过后两个向量的空间相对关系不变。其实满足保距变换的都是正交矩阵，如下：

> $$T(\vec{v})\cdot T(\vec{w}) = \vec{v}\cdot\vec{w}$$
>
> 写成矩阵乘法的形式就是：
>
> $$T(\vec{v})^T T(\vec{w}) = \vec{v}^T\vec{w}$$
>
> 然后我们把 $T(\vec{x})$ 也写成矩阵乘法的形式就是：
>
> $$\vec{v}^T T^T T\vec{w} = \vec{v}^T\vec{w}$$
>
> 于是结论就很显然了。

projection 变换

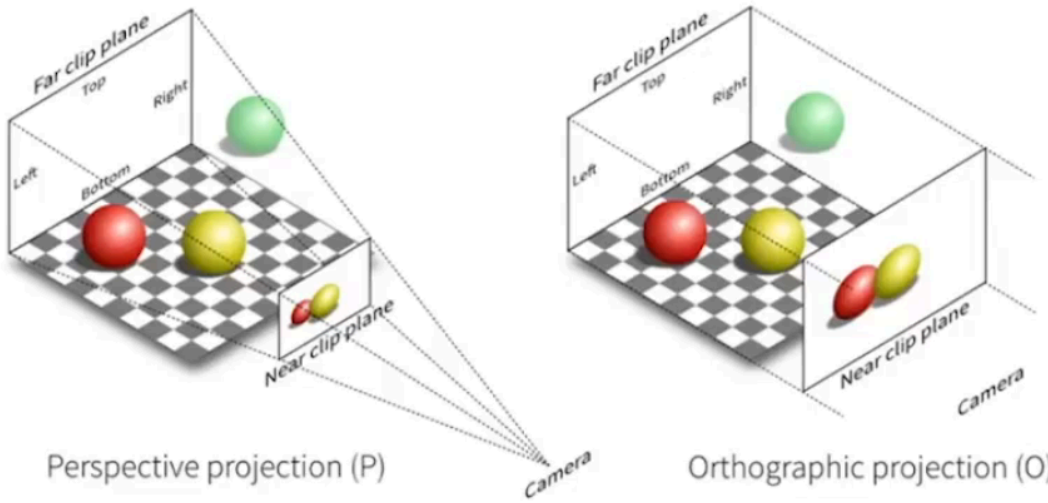


图 1　这图画的真不错，我都不需要解释了

对于 near plane 上的点，$(x_n, y_n, n) \to (x_n, y_n, n)$，对于 far plane 上的点，$(x_f, y_f, z) \to \left(\frac{nx_f}{z}, \frac{ny_f}{z}, z\right)$

通过 $(x_n, y_n, n) \to (x_n, y_n, n)$ 已经知道对 z 坐标的变换是 $(0, 0, A, B)$ 的形式，而 $(x_f, y_f, z) \to \left(\frac{nx_f}{z}, \frac{ny_f}{z}, z\right)$，也就是 $(x_f, y_f, z, 1) \to (nx_f, ny_f, z^2, z)$ 令我们可以构造方程组：

$$\begin{cases} An + B = n^2 \\ Az + B = z^2 \end{cases}$$

$z^2 - Az = n^2 - An$，也就是 $A = \frac{z^2 - n^2}{z - n} = z + n$，$B = -zn$（至少这段是我独立推导的，但感觉有点寒碜……）

作业 0 我上周就做了……

现在开始推导 rodrigue’s rotaion formula 喽，看了下补充材料的前两步，是基于那个特定的轴定义了一个参考坐标系，不过没给出具体过程，问了下 AI 发现，是通过把向量分解成相对于旋转轴的平行分量和垂直分量。

推导过程倒是挺 naive，就是整理成旋转矩阵会有些麻烦，要注意如何把叉积写成矩阵形式，这个我还不会，以后又得还债了。